"十四五"职业教育国家规划教材
（中等职业学校公共基础课程教材）

数学

SHUXUE

基础模块

上册

第五单元
三角函数

回顾与思考

在现实世界中[illegible]周期现象，它们的运动和变化周而复始．例如，[illegible]一定点绕车轮轴的运动，每天24小时的昼夜[illegible]等等，这些周期运动与周期现象都可以[illegible]

三角函数[illegible]，又是解决生产实际和科学技术中[illegible]

[illegible]三角函数的基础上，对角的概念进行[illegible]三角函数，学习一些三角关系式，研究三角函数[illegible]知识将为同学们今后学习专业知识，掌握[illegible]

5.1 角的概念的推广

引例

生活中的很多物体都给我们以角的印象．如三角板的三个角，钟表的时针与分针所构成的角等．但是，我们注意到，钟表的时针与分针一直在不停地旋转着，它们所转过的角已远远超过360°，那么这样的角该怎样描述呢？

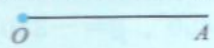
我们知道，在平面内，角可以看作是一条射线绕着它的端点旋转而成的图形．旋转起始时的射线叫做**角的始边**，终止时的射线叫做**角的终边**，射线的端点叫做**角的顶点**．

图 5－1（1）中，OA 是角 α 的始边，OB 是角 α 的终边，O 是角 α 的顶点．

图 5－1（2）中，$O'A'$是角 β 的始边，$O'B'$是角 β 的终边，O'是角 β 的顶点．

工具箱

直线上的一点和它一旁的部分所组成的图形称为射线或半直线．如射线 OA．



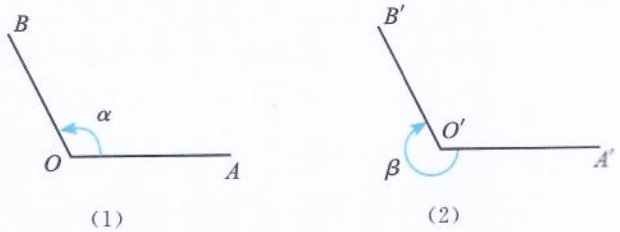


图 5－1

角除了用字母 A，B，C 等表示外，还可以用字母 α，β，γ 等表示．特别是当角作为变量时，常用字母 x 表示．

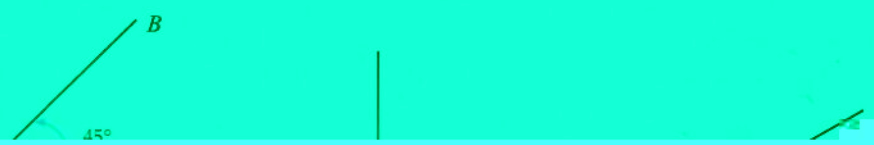
在初中，我们学习过 0°到 360°的角．如果 $\alpha=90°$，那么 α 叫做直角；如果 $0°<\alpha<90°$，那么 α 叫做锐角；如果 $90°<\alpha<180°$，那么 α 叫做钝角；如果 $\alpha=180°$，那么 α 叫做平角；如果 $\alpha=360°$，那么 α 叫做周角．

在实际问题中，我们经常会遇到大于 360°的角和按不同方向旋转所成的角. 例如，机械专业的学生拧紧一个螺帽，要把它按一个方向旋转，可能需要 1 周，2 周，……，这样转过的角往往超过 360°. 而当放松螺帽时，又要按与拧紧时相反的方向旋转，可能需要 1 周，2 周，……. 因此，角的范围不只限于 0°到 360°.

既然角是由一条射线绕着它的端点旋转而成，旋转时就有两个相反的方向，即逆时针方向和顺时针方向. 为了区别因旋转方向不同而形成的角，我们规定：按逆时针方向旋转所得到的角为**正角**，如图 5-1 (1) 中，α 为正角；而按顺时针方向旋转所得到的角为**负角**，如图 5-1 (2) 中，β 为负角. 我们还规定：当一条射线没有做任何旋转时，也把它看成一个角，叫做**零角**. 这样，零角的始边和终边重合. 如果角 α 是零角，那么 $\alpha=0°$.

如图 5-2 所示，射线 OA 绕点 O 按逆时针方向旋转 45°到 OB 的位置，所形成的角可记作$\angle AOB=45°$；射线 OA 绕端点 O 按顺时针方向旋转 30°到 OC 的位置，所形成的角可记作$\angle AOC=-30°$.

画图时，我们常用带箭头的弧来表示旋转生成的角. 如图 5-3 中，$\alpha=450°$，$\beta=-330°$.



试一试 请在平面直角坐标系中作出 60°，150°，270°，-210°，-300°的角，并分别说出它们各是第几象限角.

如果把 $\alpha=30^\circ$按上述方法放到直角坐标系中（图 5-4），α 的始边为 Ox，终边为 OP，那么 α 是第一象限的角.

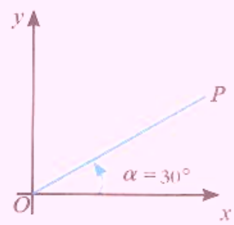


图 5-4

议一议 以 Ox 为始边，把 30°角的终边分别按照逆时针方向和顺时针方向旋转 2 周后，所得角的大小分别是多少度？与 $\alpha=30^\circ$有相同的始边和终边的角可以怎样表示呢？

这些角可以分别表示为

$30^\circ+360^\circ$，　$30^\circ-360^\circ$，

$30^\circ+2\times360^\circ$，　$30^\circ-2\times360^\circ$，

$30^\circ+3\times360^\circ$，　$30^\circ-3\times360^\circ$，

…

所有这些角可以表示为 $30^\circ+k\cdot360^\circ$（$k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq0$）. 如果把 α 本身也算在内，那么这些角可以表示为 $30^\circ+k\cdot360^\circ$（$k\in\mathbf{Z}$）.

这些顶点为坐标原点，始边为 x 轴正半轴，且有相同终边的角，叫做**终边相同的角**. 由上述问题的讨论可以知道，与角 α 终边相同的角有无数多个.

一般地，所有和角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可以表示成

$\alpha+k\cdot 360^\circ$ $(k\in\mathbf{Z})$.

结合集合的知识，对于每一个任意大小的角 α，就确定了一个与 α 终边相同的角的集合，这个集合可以表示为

$$S=\{x\mid x=\alpha+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

反之，如果 $x=\alpha+k\cdot 360^\circ$ $(k\in\mathbf{Z})$，那么 x 与角 α 就是终边相同的角，因此，它们或同属于某一个象限，或终边同在某一条坐标轴的半轴上.

例如，$750^\circ=30^\circ+2\times 360^\circ$，则 750° 角与 30° 角同属于第一象限；$-450^\circ=270^\circ-2\times 360^\circ$，则 -450° 角与 270° 角同在 y 轴的负半轴上.

例1 在 $0^\circ\sim 360^\circ$ 范围内*，找出与下列各角终边相同的角，并判定各角所在的象限：

(1) $1\,000^\circ$；　(2) -120°；　(3) $410^\circ 30'$.

解 (1) $\because 1\,000^\circ=280^\circ+2\times 360^\circ$，

$\therefore 1\,000^\circ$ 角和 280° 角的终边相同.

又 280° 角属于第四象限，

$\therefore 1\,000^\circ$ 角也是第四象限角.

(2) $\because -120^\circ=240^\circ-360^\circ$，

$\therefore -120^\circ$ 角和 240° 角的终边相同.

又 240° 角属于第三象限，

$\therefore -120^\circ$ 角也是第三象限角.

(3) $\because 410^\circ 30'=50^\circ 30'+360^\circ$，

$\therefore 410^\circ 30'$ 角和 $50^\circ 30'$ 角的终边相同.

又 $50^\circ 30'$ 角属于第一象限，

$\therefore 410^\circ 30'$ 角也是第一象限角.

想一想　锐角是第几象限角？第一象限的角都是锐角吗？

* 本书中，角 α 在 $0^\circ\sim 360^\circ$ 范围内，是指 $0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ$.

个是 90° 角，另一个是 270° 角（图 5－5）.

因此，终边在 y 轴上的所有的角是 $90°+k\cdot360°$ 和 $270°+k\cdot360°$（$k\in\mathbf{Z}$）. 注意到

图 5－5

$$90°+k\cdot360°=90°+2k\cdot180°, \quad ①$$

$$270°+k\cdot360°=90°+180°+2k\cdot180°$$
$$=90°+(2k+1)\cdot180°. \quad ②$$

①式的右边是 180°的偶数倍加 90°，②式的右边是 180°的奇数倍加 90°，两式合并起来就是 180°的任意整数倍加 90°，即 $90°+n\cdot180°$（$n\in\mathbf{Z}$）. 所以，终边在 y 轴上的角的集合可以写成

$$S=\{\beta \mid \beta=90°+n\cdot180°, n\in\mathbf{Z}\}.$$

练习

1. 在直角坐标系中，以原点为顶点，x 轴的正半轴为始边，画出下列各角，并分别指出它们是第几象限角：

   (1) 390°；　　(2) －60°；　　(3) －585°.

2. 在 0°～360°范围内，找出与下列各角终边相同的角，并分别指出它们是第几象限角：

   (1) 480°；　　(2) －760°；　　(3) 932°30′.

3. 写出与下列各角终边相同的角的集合：

   (1) 72°；　　(2) －40°；　　(3) 202°39′.